Minule: • X je spočetná, pokud $X \approx \omega$, tj. existuje bijekce $X \xrightarrow{na} \omega$.

• X je nejvýše spočetná, pokud X je konečná $\vee$ spočetná.

Věta: X spoč., $Y \subseteq X \longrightarrow Y$ nejvýše s.
(Tj. ω má nejmenší nekonečnou mohutnost.)

Věta: $\omega \times \omega \approx \omega$

Důkaz: „$\geq$" zobrazení $\omega \to \omega \times \omega$
$n \longmapsto (0,n)$ je prosté.

„$\leq$" Prosté zobrazení $\omega \times \omega \longrightarrow \omega$?
$(m,n) \in \omega \times \omega \longmapsto 2^m \cdot 3^n$
je prosté podle ZVA.

Podle C.-B. věty $\omega \approx \omega \times \omega$. $\boxtimes$

Věta: $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$ jsou spočetné.

Důkaz: • $\mathbb{N}$ triv.

• $\mathbb{Z} = \{0\} \times \omega \cup \{1\} \times (\omega \setminus \{0\})$

$\mathbb{Z} \ni 3 \leftrightsquigarrow (0,3)$ $\quad$ $\mathbb{Z} \ni -5 \leftrightsquigarrow (1,5)$

$\mathbb{Z} \subset \omega \times \omega$, odkud $\mathbb{Z} \preccurlyeq \omega \times \omega \approx \omega$

ale $\mathbb{Z}$ je nekonečná $\Longrightarrow \mathbb{Z}$ je spoč.

• $\mathbb{Q} = \mathbb{Z} \times \mathbb{N} / \sim$

Nejprve: $\mathbb{Z} \approx \omega \wedge \mathbb{N} \approx \omega \Longrightarrow$
$\mathbb{Z} \times \mathbb{N} \approx \omega \times \omega \approx \omega$

$\exists f: \mathbb{Z} \to \omega$, $g: \mathbb{N} \to \omega$ bijekce. Pak
$(k,n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N} \longmapsto (f(k), g(n)) \in \omega \times \omega$
je bij.

Výběr representanta $q \in \mathbb{Q} \mapsto (k,n)$ je evidentně prosté (protože $\forall p,q \in \mathbb{Q}$: $p \neq q \to p \cap q = \emptyset$).

Stačí $q \mapsto (k,n)$ tak, že $NSD(k,n)=1$.

To je prosté zobrazení $\mathbb{Q} \to \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$, tj. $\mathbb{Q} \preccurlyeq \mathbb{Z} \times \mathbb{N} \approx \omega$. Tedy

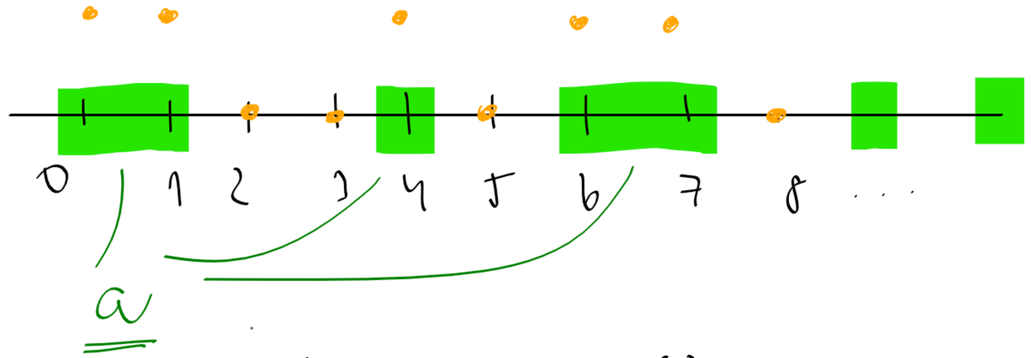
$\mathbb{Q}$ je nejvýše spočetná $\Longrightarrow$ spočetná $\boxtimes$

<u>Věta</u>: $\mathbb{R} \approx \mathcal{P}(\omega) \approx {}^{\omega}2$ $\quad \{0,1\}$

(<u>Pozn.</u>: ${}^{\omega}2 = \{f : f \text{ je zobrazení } \omega \to 2\}$)

<u>Důkaz</u>: $\mathcal{P}(\omega) \approx {}^{\omega}2$: Je-li $a \in \mathcal{P}(\omega)$, tj. $a \subseteq \omega$, pak

$$\chi_a(n) = 1_a(n) = \begin{cases} 1 & n \in a \\ 0 & n \notin a \end{cases} \in {}^{\omega}2.$$



Tvrdím, že $\varphi : \mathcal{P}(\omega) \to {}^{\omega}2$

$a \mapsto \chi_a$ je bijekce.

<u>$(0,1] \preccurlyeq {}^{\omega}2$</u>: Pro libovolné $x \in (0,1]$ existuje jednoznačně určený binární rozvoj obsahující nekonečně mnoho 1.

(Třeba $1 = 0{,}1111\ldots$,

$\frac{1}{2} = 0{,}1000\ldots = 0{,}011111\ldots$)

$\Rightarrow$ máme prosté zobrazení $(0,1]$ do ${}^{\omega}2$.

$^{\omega}2 \preccurlyeq [0,1]$ nechť $f \in {}^{\omega}2$ libovolné.

$$f \longmapsto \sum_{n=0}^{\infty} f(n) \cdot 10^{-(n+1)}.$$

$f: 1,0,0,1,1\ldots \longmapsto 0{,}10011\ldots$ prosté

Máme $(0,1] \preccurlyeq {}^{\omega}2 \preccurlyeq [0,1] \preccurlyeq (0,1]$ (vnoření)

Tedy C-B ${}^{\omega}2 \approx [0,1] \approx (0,1)$

Tedy ${}^{\omega}2 \approx (0,1)$.

Ale $(0,1) \approx \mathbb{R}$: Důkaz:

$g: \mathbb{R} \to (0,1)$: $g(x) = \frac{1}{\pi} \operatorname{arccotg} x$

je bijekce. Celkem: ${}^{\omega}2 \approx \mathbb{R}$. $\boxtimes$

$\omega \prec \mathcal{P}(\omega) \approx \mathbb{R} \Rightarrow \mathbb{N} \approx \omega \prec \mathbb{R}$. $\boxtimes$

Věta (Cantor): $(\forall x)\ x \prec \mathcal{P}(x)$.

Důkaz: Triviální $x \preccurlyeq \mathcal{P}(x)$, protože $a \in x \longmapsto \{a\} \in \mathcal{P}(x)$ je prosté.

SPOREM: Kdyby $x \approx \mathcal{P}(x)$: $g: x \to \mathcal{P}(x)$ buď bij.

Položme

$$y = \{a \in x : a \notin g(a)\} \subseteq x, \text{ tj. } y \in \mathcal{P}(x)$$

Protože g je na, $\exists b \in x: g(b) = y$.

Pokud: • $b \in g(b) = y \overset{\text{def. } y}{\Longrightarrow} b \notin g(b)$ ↯

• $b \notin g(b) \overset{\text{def. } y}{\Longrightarrow} b \in y = g(b)$ ↯ $\boxtimes$

Důsledek: „Existuje nekonečně mnoho nekonečných mohutností."

ORDINÁL je transitivní množina dobře uspořádaná relací $\in$.

- x je <u>transitivní</u>, pokud

$(\forall a)\ a \in x \longrightarrow a \subseteq x$. neboli:

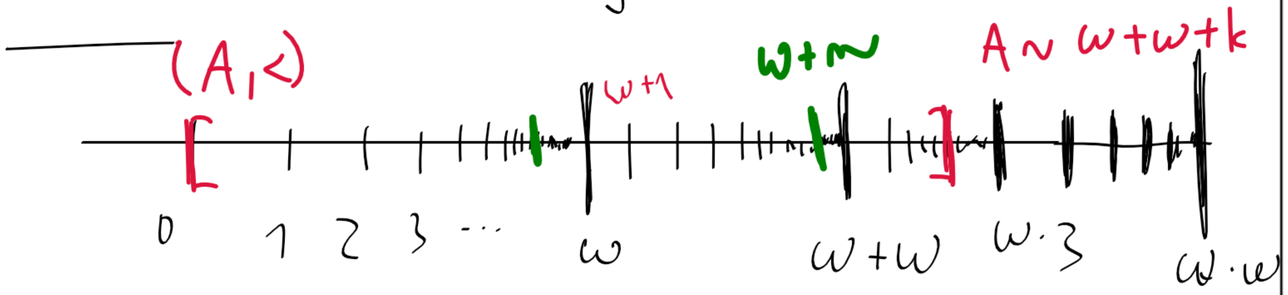
$(\forall a)(\forall b)\ b \in a \wedge a \in x \longrightarrow b \in x$.

<u>Příklady</u>: • $(\omega, \in)$ je dobré uspořádání,

$n \in \omega \longrightarrow n = \{m \in \omega : m < n\} \subseteq \omega$

$\Rightarrow$ ω je <u>ordinál</u> (ordinální číslo)

• Libovolné $n \in \omega$ je ordinál. (<u>W.</u>)



<u>Značíme</u>: α je ordinál $\overset{def.}{\Longleftrightarrow}$ $\alpha \in \boxed{O_n}$

Třída všech ordi.

<u>Lemma</u>: • $\alpha, \beta \in O_n \rightarrow \alpha \cup \beta,\ \alpha \cap \beta \in O_n$

- $x \in \alpha \in O_n \rightarrow x \in O_n$
- $\alpha, \beta \in O_n$: $\alpha \in \beta \longleftrightarrow \alpha \subset \beta$
- $\in$ je ostré dobré uspořádání na O_n.

(<u>Důsl.</u> (Burali-Fortiho paradox) $O_n \notin \mathbb{V}$.)

- $A \subseteq O_n \rightarrow \bigcap A = \min_{\in} A$
- $a \subset O_n \rightarrow \bigcup a = \sup_{\in} a \in O_n$
- ω je nejmenší nekonečný ordinál.
- $\alpha \in O_n \rightarrow \alpha \cup \{\alpha\} = \min\{\beta \in O_n : \beta > \alpha\}$

Tj. $\alpha \cup \{\alpha\}$ je bezprostřední násl.

<u>Def</u>: $\alpha \in O_n$ je <u>izolovaný</u>, má-li bezpr. předch.

V opačném př. je α limitní ordinál.

Př: ω, $\omega+\omega$, $\omega\cdot\omega$, $\omega\cdot\omega+\omega$ ... limitní

$\omega+6$, 7, $\omega+\omega+1$, $\omega\cdot\omega+69$ ...
izolované.

Věta: (typy dobře uspořádaných množin)
Buď $(A,<)$ dobře uspořádaná.
Pak $\alpha\in On$ tak, že $(A,<)\sim(\alpha,\in)$.
(Tj. $\exists g: A\to\alpha$ bijekce, že
$\forall a,b\in A: a<b \longleftrightarrow g(a)\in g(b)$.)

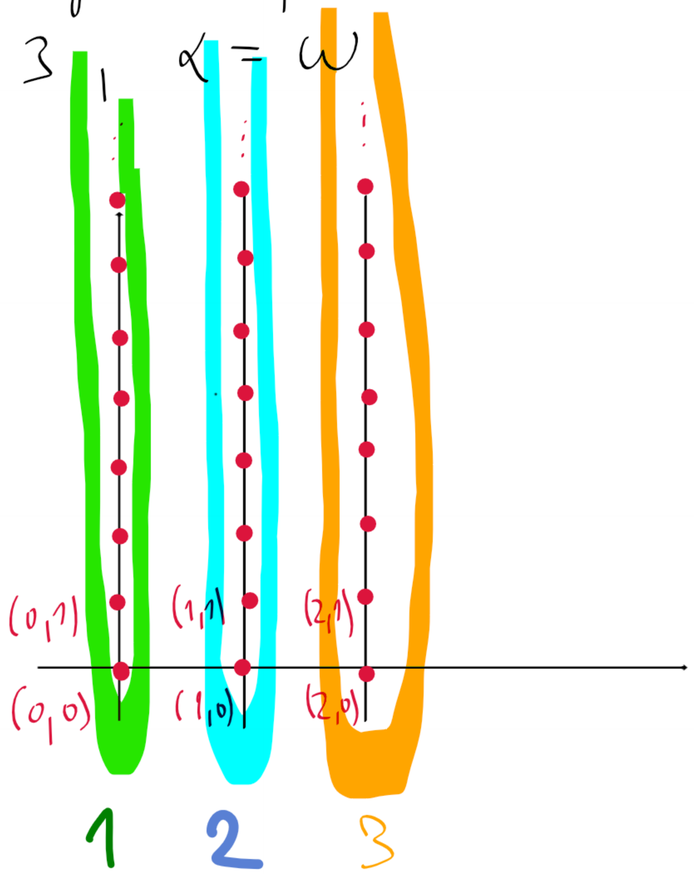
Operace: $\alpha,\beta\in On$

$$\alpha+\beta = \mathrm{Typ}\left(\left(\{0\}\times\alpha\right)\cup\left(\{1\}\times\beta\right)_{lex}\right)$$

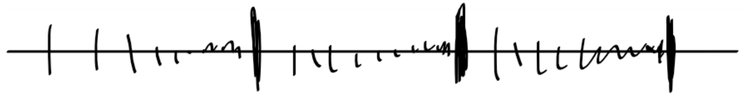
$$\alpha\cdot\beta = \mathrm{Typ}\left(\beta\times\alpha_{lex}\right)$$

lexikogr. uspořádání:

$\beta = 3$, $\alpha = \omega$



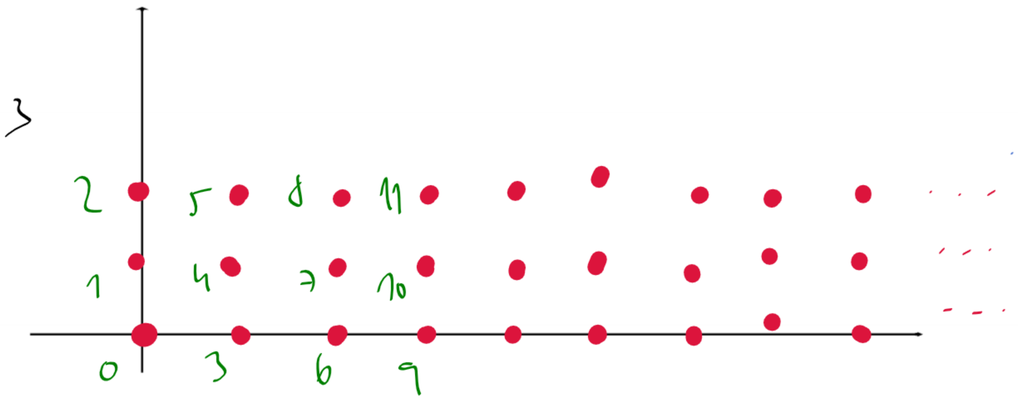
$\omega\cdot 3$:

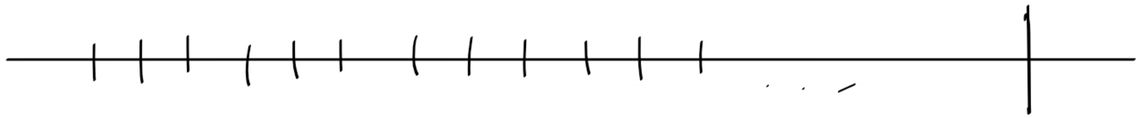


ω $\quad$ $\omega+\omega$ $\quad$ $\omega+\omega+\omega = \omega\cdot 3$

$3 \cdot \omega = \omega$

$\omega \times 3$



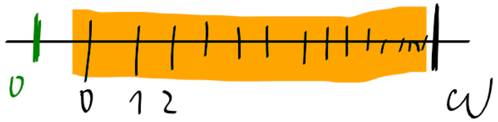


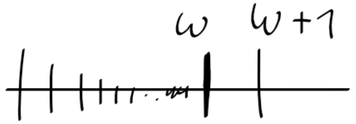
ω

$3 \cdot \omega = \omega$ ale $\omega \cdot 3 = \omega + \omega + \omega \neq \omega$

<u>Cvičení</u>: $1 + \omega \neq \omega + 1$

Totiž $1 + \omega = \omega$





Ordinální mocnina:

$$\omega^\omega = \bigcup_{n \in \omega} \omega^n = \bigcup_{n \in \omega} \overbrace{\omega \cdot \omega \cdot \omega \cdots \omega}^{n \text{ krát}}$$

ω^ω je spočetná množina.

$$\omega^{\omega^{\omega^{\omega^{\cdots}}}} = \underline{\underline{\varepsilon}} \quad \text{spočetný}$$

První nespočetný ordinál ω_1
(obsahuje právě všechny spočetné ord.)

<u>Hypotéza kontinua</u> $\omega_1 \approx \mathbb{R}$ (CH)

Ekviv $(\forall x)\ \omega \lneq x \lneq \mathbb{R} \rightarrow x \approx \omega \vee x \approx \mathbb{R}$.